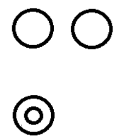
צורות המספר(*)

משה קליין

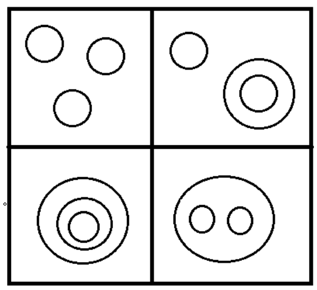
המאמר דן בשאלה על מספר היחסים שבין מעגלים שאינם נחתכים במישור. כל יחס אפשרי נקרא צורה של מספר. נסביר את הקשר לחלוקות המספר באמצעות רקורסיה. צורות המספר משמשות מודל של חוקי הצורה שפיתח ג'ורג' ספנסר-בראון. בהשוואה לשפה הבינארית זוהי שפה עם סמל יחיד.

א. מבוא

נתונים שני מעגלים וצריך למקם אותם אחד ביחס לשני כך שהם לא יחתכו זה עם זה.
יש לכך שתי אפשרויות שונות. מעגל ליד מעגל או מעגל בתוך מעגל.



כשנתונים שלשה מעגלים יש 4 אפשרויות שונות:



בהמשך נראה איך האפשרויות השונות יכולים להיות קשורים למושג המספר. לכל אפשרות שכזו נקרא "צורה של מספר". החלק הבא קשור למספרים והחלק השלישי קשור למספרים בינריים.

ב. קשר למספרים

מספר צורות המספר כפונקציה של מספר המעגלים יוצרת סידרה שמתחילה כך:
1,2,4,9,20,48, ...

בכדי לחשב את מספר הצורות מדרגה מסויימת אפשר להשתמש בפונקציית החלוקה של מספר. חלוקה של מספר היא דרך להציג אותו כסכום של מספרים קטנים או שווים לו כשאין חשיבות לסדר. לשם נוחות הסימון אפשר לייצג את צורות המספר גם באמצעות סוגריים כפולים.
נסתכל למשל על שתי החלוקות של המספר 2:

2=1+1 → ()()
2=2 → (())

(*) המאמר נכתב להרצאה בכנס משחקי חשיבה שיתקיים במכון וייצמן ב 30.5.13

נתבונן כעת בצורות שנובעות מהחלוקות של המספר 3 :

3=1+1+1 → ()()()
3=1+2 → ()(())
3=3 → (()()) ; ((()))

נשים לב שהחלוקה 3=3 יוצרת שתי צורות שונות של 3. כאשר מדובר על מעגל ובתוכו שתי הצורות השונות של המספר 2. לכן ניתן להשתמש בתהליך של רקורסיה לחשב את צורות המספר מצורות קודמות.

נסתכל ב 9 הצורות של 4 הנובעות מ 5 החלוקות שלו :

4=1+1+1+1 → ()()()()

4=1+1+2 → ()()(())

4=2+2 → (())(())

4=1+3 → ()(()()) ; ()((()))

4=4 → (()()()) ; (()(())) ; ((()())) ; (((())))

צורות המספר הם בעצם חלוקה דו מימדית. כל חלוקה של מספר יוצרת מספר צורות מספר המתאימות לה. נסמן ב (n-1) את מספר הצורות של n-1 עיגולים המוקפים כולם בעיגול גדול. נשים לב שבגלל שאנחנו יוצרים קינון בתוך סוגריים יש להוריד מספר אחד ולבצע רקורסיה על רמה נמוכה יותר.

הטבלה הבאה מתארת לשם דוגמא כיצד מכל חלוקה של 4 ניתן ליצור צורה של 4 .

Partitions	The Recursion	No of forms
1+1+1+1	()()()()	1
1+1+2	()()(1)	1
1+3	()(2)	2
2+2	(1)(1)	1
4	(3)	4
Total		9

נסמן ב pf(n) את מספר הצורות של n. הנוסחה הרקרוסיבית לחישוב מספר הצורות באמצעות מעבר על כל החלוקות של המספר n כאשר s(j) מספר החזרות של המספר K(j) בחלוקה של n היא :

$$pf_n = \sum \prod_{j=1}^{m} \binom{pf_{k_j-1} + s_j - 1}{s_j},$$

להלן השוואה בין מספר החלוקות למספר הצורות :

N	1	2	3	4	5	6
חלוקות	1	2	3	5	7	11
צורות	1	2	4	9	20	48

ג. מודל בינארי

בעקבות משפטי אי השלמות של גדל פיתח הפילוסוף וויטגנשטיין רעיון על קיום פעולה מתמטית בסיסית שהיא הצבעה על אובייקט והפרדה שלו מהסביבה שלו. את הפעולה הזו הוא הציע לסמן באמצעות סימן הסוגריים הכפולים. צורות המספר היא דרך פשוטה לסמן זאת. המתמטיקאי ג׳ורג׳ ספנסר בראון פירסם בשנת 1969 את הספר חוקי הצורה. בעולם זה כדי לסמן כלום לא צריך את סימן האפס אלא מסמנים כלום פשוט באמצעות דף ריק. קיימים שני חוקי צמצום פשוטים של צורות.

()()=()

(())=

דוגמא לצמצום של צורה: (()())=(())=

ניתן לקודד את הלוגיקה הבוליאנית בעזרת חוקי הצורה.

"1"=()
"0" =

לדוגמא A=()="1"
(A)=(())="0"

לפיכך נובע שלכל ביטוי A , (A) היא השלילה של A.
((...))="0" כשיש מספר זוגי של סוגריים כפולים
(((...)))="1" כשיש מספר איזוגי של סוגריים כפולים
לכל ביטוי A מתקיים:

A()=()

((A))=A

AA=A

AB= A OR B

((A)(B))=A and B

פרדוקס השקרן A=(A)

ד. שפה חדשה

הפילוסוף והמתמטיקאי לייבניץ שאף לגלות שפה מתמטית חדשה עם לוגיקה רכה יותר מאמת ושקר. צורות המספר יוצרות שפה מתמטית חדשה שיש בה רק סמל יחיד שהוא מעגל. ייחוד השפה הזו בשונה מהשפה המתמטית הרגילה הוא שהחיבור בין סמלים הינו גם לרוחב וגם לעומק ולכן הלוגיקה הרגילה אינה מכילה את צורות המספר כמקרה פרטי. פשטות השפה אינה הופכת אותה לטרויואלית אלא לעמוקה משום שצורות המספר מגשימים את רעיון הרקורסיה על מספרים.

בתאוריה מרחב ההשתקפויות שפיתח רועי לוטן הוא מציע להסתכל על מרחב ההשתקפויות האינסופי של אובייקט מול שתי מראות כמודל הפיסיקלי של צורות המספר. כל השתקפות מכילה את ההשתקפויות העוקבות לה.

A=((...))

A=(A)

זהו מודל פיסיקלי שממש את צורות המספר.

תודות

לדורון שדמי על ההנחיה במספרים אורגניים. לטל מור על ההנחיה בניסוח הרקורסיה של חלוקות המספר. לספנסר בראון על ההנחיה בחוקי הצורה.

ה. מקורות

משה קליין - "מכתבי אהבה למתמטיקה" בהוצאת רכס 2002

George Spencer Brown Laws of Form   1969

Organic Mathematics : Moshe Klein, Doron Shadmi Int. J. Pure and Applied Math. 49 (2008), 329-340

Quantum Integers Andrei Khrennikov, Moshe Klein, and Tal Mor; AIP conference proceeding 1232, Reconsideration of Foundation -5 Vaxjo Sweden

רועי לוטן – מרחב ההשתקפויות 2013